PR. ALEKSANDRAS DAMBRAUSKAS, KAUNAS

RATILAI SFEROJE IR E. BARTHELIO POLIARĖ GEOMETRIJA

Ratilu *plokštumoj* vadiname kreivę, kurios visi taškai yra lygiai nutolę nuo duotojo taško. Tų taškų nuotoliai plokštumoj matuojami *tiesiomis* linijomis, vadinamomis *spinduliais* (stipinais).

Tuo būdu ratile atskiriame tris dalykus: 1) duotąjį plokštumoj tašką, vadinamą *centru*; 2) to centro nuotolį nuo kitų ratilo taškų, kurį vadinam *spinduliu* (stipinu) ir 3) geometrinę toj pat plokštumoj lygiai nuo centro nutolusių taškų vietą; ją vadinsime *apskritimu*. Apskritimas ir sudaro pačią kreivę, kurią bendrai vadiname ratilu.

Ratilas yra vienintelė kreivė, kuri elementarėj geometrijoj yra tiriama. Svarbiausios ratilų plokštumoj savybės yra šios:

1) ratilų spinduliai yra *tiesiosios linijos*;

2) kiekvieną tam tikro dydžio apskritimą nustato tik *vienas* tam tikro dydžio spindulys;

3) spinduliui didėjant, *visuomet didėja* ir jam atsakąs apskritimas;

4) ratilo spindulys, klostomas jo apskritime, visuomet atgula jame *lygiai šešis kartus*, padalindamas apskritimą į 6 lygias dalis.

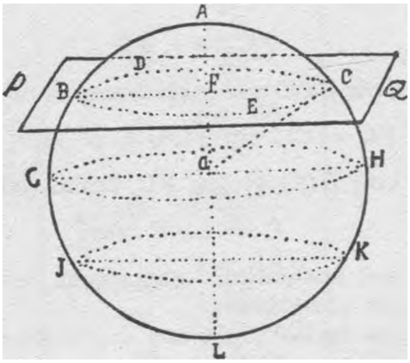
5) ratilų apskritimai *visuomet esti tam tikrą kiekį kartų didesni, negu jų spindulai*. Todėl jei tam tikro ratilo apskritimą pažymėsime raide C, o jo dvigubą spindulį bei *skersmenį* (diametre) simboliu 2R, tai jų dviejų santykis bus visuomet nekintamas, pastovus ir lygus tam pačiam transcendenčiam dydžiui ; kitaip sakant, turėsime visuomet lygybę :

(1) .... C/2 R =

Nūn pažiūrėkim, kokių savybių turi ratilai *sferos* paviršiuje. Tam tikslui imkim didžiajame sferos ratile tašką A. Tame pat ratile nustatykim tašką B taip, kad lankas AB, lygus lankui AC, turėtų /2 laipsnių, o visas lankas BAC turėtų laipsnių.

Tuomet geometrinė taško B vieta sferos paviršiuje bus irgi ratilas BDCEB. Visi jo apskritimo taškai, gulėdami sferos paviršiuje, gulės drauge ir plokštumoj PQ, statmenoj į sferos skersmenį AL. Kaipo gulinčio sferos paviršiuje to ratilo spindulys bus lankas AB, o jo skersmuo — lankas BAC; o kaipo gulinčio visais savo taškais plokštumoj PQ, jo spindulys bus tiesioji FC, o jo skersmuo — tiesioji BFC. Ši bus statmena į sferos skersmenį AL ir perkirs jį taške F.

Tame pat sferos paviršiuje iš to pat taško A nubrėžkim dar ratilą lanku AG, turinčiu lygiai 90 laipsnių, ir kitą lanką AI, turinčiu daugiau kaip 90 ir mažiau kaip 180 laipsnių. Tų ratilų skersmens GH ir JK taip pat bus statmeni į AL. (Žiūr. 1. brėž.).



1. brėž.

Iš šito brėžinio jau matom, kad ratilai sferos paviršiuje turės visai kitokių savybių, negu ratilai plokštumoj. Ir iš tikrųjų —

1) ratilų spinduliai sferos paviršiuje bus nebe tiesiosios, bet kreivosios linijos, nes jie bus didesni ar mažesni sferos didžiojo ratilo lankai;

2) sferos paviršiuje tam tikro dydžio apskritimą galės nustatyti nebe vienas, bet begalinė nelygių spindulių daugybė, pav., apskritimas BDCEB galės būt nubrėžtas sferos paviršiuje ne vien stipinu AB, bet ir stipinais ABILKC ir ABILKCAB ir t. t.

3) Spinduliams didėjant, ratilų apskritimai sferos paviršiuje galės nevien didėti, bet ir mažėti. Pav., spinduliui AB einant didyn, apskritimai didės; prie spindulio AG apskritimas pasieks savo maksimumo. Bet spinduliams dar toliau didėjant, apskritimai ims mažėti ir prie spindulio AGL — jie pasieks savo minimumo, virsdami tašku; prie spindulių dar didesnių negu AGL, apskritimai vėl ims didėti ir prie spindulio AGLH jie antru atveju pasieks pirmykščio maksimumo, nuo kurio prie tolesnio spindulių didėjimo iš naujo ims mažėti ir prie spindulio AGLHA pasieks naujo minimumo, nuo kurio vėl pradės didėti ir t.t. be galo.

4) Jei spindulį, lygų lankui 60 laipsnių, klostysime jo nubrėžtame apskritime, tai rasime, jį atgulant jame lygiai 6 kartus. Tačiau tai nebus joks matematiškas dėsnis, kaip yra plokštumos ratiluose, bet vien tam tik-

ras pripuolamas faktas, nes pav. spindulys 64° 30' teatguls savo nubrėžtame apskritime tik 5 kartus, o spindulys 90° — tik 4 kartus, o prie dar didesnių spindulių (pav. 370 laipsnių) — negalės atgulti nei vieno karto.

5) Nūn pažiūrėkim galop, kaip sferos paviršiuje santykiuoja ratilų apskritimai su jų skersmenimis. Tam tikslui imkim aukščiau minėtą ratilą BDCEB. Tesie jo apskritimas C_1, o jo skersmuo — lankas BAC = $2R_1$. Pabandykim arčiau ištirti jų santykį

$$\frac{C_1}{2R_1}$$

Kadangi apskritimas BDCEB guli ne vien sferos paviršiuje, bet ir plokštumoj PQ, tatai to apskritimo ilgis p l o k š t u m o j duosis išreiškiamas lygybe :

(2) C1 = . FC

Bet kadangi trikampis FCO yra stačiakampis, tai iš jo gausime :

$$FC = CO \sin FOC = R . \sin /_2$$

Įstatydami šį reiškinį 5 (2) vieton FC, rasim galutinai :

(3) $C_1 = 2 \quad R . \text{sir} /_2$

Nūn ieškokim to pat apskritimo skersmens bei lanko BAC ilgį. Jis lengvai surandamas šiais sumetimais:

Viso didžiojo sferos ratilo[1] ilgis bus = 2 R ; vieno jo laipsnio ilgis

bus 360 kartų mažesnis, todėl $= \frac{2 \quad R}{360}$; o lanko BAC, kaipo turinčio *a*

laipsnių, bus *a* kartų didesnis, taigi = $\frac{2 \quad R .}{360}$. Bet mes jį aukščiau esam

pažymėję simboliu $2R_1$. Tuo remdamies, mes ir gausim lygybę:

(4) $$2R_1 = \frac{2 \pi R . \alpha}{360} = \frac{\pi R . \alpha.}{180}$$

Padalindami (3) reiškinį (4)—ju, gausim:

(5) $$\frac{C_1}{2R_1} = 3.60 . \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} = \Pi \alpha$$

Iš (5) matom, kad sferos paviršiuje ratilų apskritimų santykiai su jų skersmenimis bus lygūs nebe nekintamam transcendenčiam dydžiui , bet tam tikrai, nuo kampo *a* pareinančiai funkcijai Π , kuri, tariant žodžiais, galima bus pavadinti —os *Pi d i d ž i o j i*. Ji bus periodinė ir kitės nuo 0 ligi =3,141592... *(p i* mažajai), kaip tai galima matyti iš šios, lentelės (6) :

[1] Einančioj per jį plokštumoj.

Prie skersmens, turinčio a laipsnių:	iš (5) form.	Funkcijai $\Pi\alpha$ gaunamasis dydis:
360[1]	$3 . 60 . \frac{\sin 180}{180}$	0
300	$3 . 60 . \frac{\sin 150}{150}$	0,6
270	$3 . 60 . \frac{\sin 135}{135}$	1,151
180	$3 . 60 . \frac{\sin 90}{90}$	2
120	$3 . 60 . \sin 60 / 60$	2,828
60	$3 . 60 . \sin 30 / 30$	3
30	$3 . 60 . {}^{\sin}{}_{15}{}^{15}$	3,106
2°	$3 . 60 . \sin 1^0/1$	3,141
2'	$3 . 60^2 . \sin 1'/1$	3,1415
2"	$3 . 60^3 . \sin 1'/1$	3,14] 59
. . . .		. . .

Iš čia matom, kad sferos paviršiuje ratilų skersmenims mažėjant, funkcijos Π_α skaitmenimis dydis didėja, tik ne begalo, bet artėdamas į 3,141592... bei į . Ir pigu suprasti, dėl ko taip yra. Nes juo mažesnis ratilo sferoj skersmuo, juo mažesnę jis užima sferos paviršiaus dalį, ir juo labiau jo užgriebtoji sferos paviršiaus dalis artėja į plokštumą. O plokštumoj, kaip žinom, ratilų apskritimų santykiai su skersmenimis, kaip tik ir yra lygūs .

Tuo būdu matom, kad sferos paviršiuje ratilų savybės yra visai kitokios, negu ratilų plokštumoj.

[1] Išskyrus daugiklį 3 antroj (6) lentelės skilty ir visus trečios skilties skaičius, kurie yra *atitrauktiniai*, visi kiti tos pat (6) lentelės skaičiai reiškia tam tikrų lankų laipsnius ir todėl turėtų būti pažymėti laipsnių ženkleliu. Bet spaustuvei tų ženklelių neužtektinai teturint, mes jų nedėjom, nes jų nedėjimas apskaitymo tikslumui nekenkia.

Šį Įdomų skirtumą tarp plokštumos ir sferos ratilų pirmą kartą, kiek žinau, yra nurodęs vokiečių filosofas ir matematikas Ernestas Barthelis, Kölno universiteto privat-docentas, 1919 metais savo veikale „Polargeometrie“. Pernai šio veikalo yra pasirodęs naujas, žymiai praplėstas leidimas, vardu „Einführung in die Polargeometrie“ (Universitätsverlag R. Noske, Leipzig 1932, 179 5. in-8°).

Autorius pasirodo esąs labai drąsus vyras. Jis griežtai atmeta ligšiolinę euklidinę plokštumos geometriją ir jos vieton siūlo savąją sferinę bei poliarinę, kuri, jo išmanymu, esanti vieninteliai tinkama gamtos dėsniams tirti. Taikindamas ją astronomijai, jis prieina prie išvados, kad pati Koperniko sistema nėra visiškai tikra, kad ir visas mūsų pasaulis esąs daug mažesnis, negu ligšiol manyta, kad ir mūsų saulė tesanti nuo žemės tenutolus vos 7000 kilometrų, kad nejudamos žvaigždės nesančios saviti dangaus kūnai, bet tik tam tikri mūsų saulės optiški atspindžiai. Smarkiai kritikuoja jis ir Galilėjo kritimo dėsnius ir Newtono optiką. Šią pastarąją bando patobulinti Goethės nurodytais pagrindais. Šios ir kitos p. Barthelio išvados savaime bruka mintį, kad ir pačiuose jo „poliarinės geometrijos pagrinduose, kažin, ar nebus tik gana stambių klaidų“?! Sena euklidinė plokštumos geometrija per 2000 su viršum metų yra užtektinai įrodžius, kad ji gerai tinka gamtos dėsniams tyrinėti. Ar Barthelio nauja poliarinė bei sferos geometrija pasirodys tinkamesnė, mes dar nežinom. Taigi, šiaip ar taip rimtas kritiškas šios pastarosios ištyrimas atrodo labai pageidaujamas. Dėliai to aš ir laikiau savo pareiga atkreipti į ją mūsų matematikų akį. Aš parodžiau, kas joj teisinga; nūn belieka surasti ir įrodyti jos klaidos.